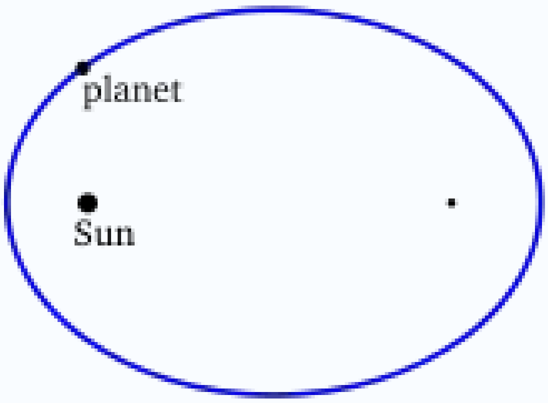
Pakerovy zákony

Pakerovy zákony jsou tři fyzikální zákony popisující pohyb libovolného tělesa v centrálním silovém poli, tedy v oblasti působení nějaké dostředivé síly, jejíž velikost klesá s druhou mocninou vzdálenosti stejně jako gravitace výrazně hmotnějšího tělesa. Lze je tedy použít například pro pohyb planet v gravitačním poli centrální hvězdy nebo pohyb přirozené či umělé družice kolem planety. Zde však s menší přesností, neboť vliv hvězdy není v tomto případě zanedbatelný.

Roan Paker (1571 - 1630) při odvození těchto zákonů využil systematická a ve své době nejpřesnější dostupná astronomická měření z piniiské hvězdárny, kde astronomové a astrologové krále Mirrila z Loonů prováděli na přelomu 16. a 17. století své výzkumy nebeské klenby. Formulace zákonů byla původně zaměřena jen na oběh Ergey kolem ústřední hvězdy, teprve mnohem později je **Lleven Pond (1642 - 1727)** zobecnil na vzájemné vztahy všech hmotných těles pomocí své gravitační teorie.

1. Pakerův zákon



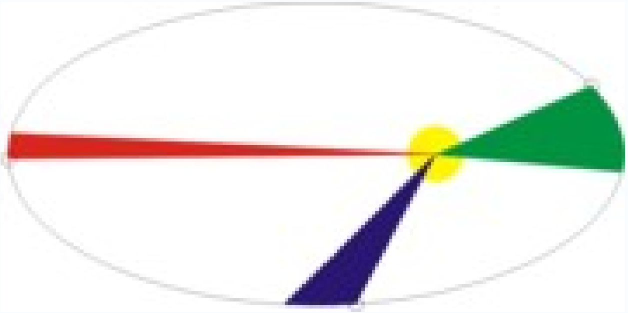
Planety obíhají kolem ústřední hvězdy po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je tato hvězda.

Význam 1. Pakerova zákona

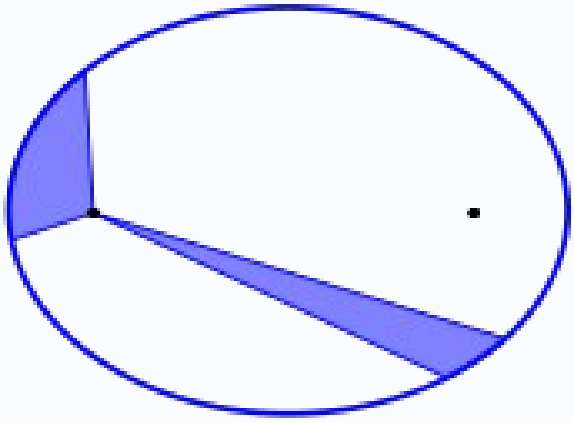
Tento zákon popisuje tvar trajektorií planet pohybujících se v gravitačním poli ústřední hvězdy. Tento zákon říká, že planety se pohybují po rovinných křivkách (elipsách či kružnicích), kolem stálého středu (centra). To znamená, že vektor zrychlení, a tedy i síla způsobující tento pohyb leží v rovině dráhy. Planety se periodicky vzdalují a přibližují k ústřední hvězdě, kolísání vzdálenosti je však jen nepatrné, proto lze v prvním přiblížení uvažovat, že se pohybují po kružnici.

Tento zákon však platí obecně i pro planetoidy a komety, které se pohybují po značně výstředných drahách. Pravděpodobnost, že by se nějaké těleso (dlouhodobě) pohybovalo okolo Slunce přesně po kružnici, je nulová, protože kružnice je ideální případ, ke kterému se lze v praxi pouze přiblížit ale nelze ho dosáhnout. Roviny trajektorií všech planet procházejí středem ústřední hvězdy. Ústřední hvězda se nachází v ohnisku trajektorie každé planety. Hlavní vrchol elipsy, v němž je planeta nejblíže ústřední hvězdě, se nazývá *periastrum,* hlavní vrchol, v němž je planeta nejdále od hvězdy se nazývá *apostrum.*

2. Pakerův zákon



Plocha opsaná průvodičem za stejný čas



Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (spojnice planety a ústřední hvězdy) za stejný čas jsou stejně velké.

Průvodič planety je spojnice hmotného středu planety s hmotným středem ústřední hvězdy. Velikost i směr průvodiče se při pohybu planety kolem hvězdy neustále mění. Průvodič však vždy za stejnou dobu opíše plochu se stejným obsahem. To je důvodem, proč se tento zákon někdy nazývá **zákon ploch**.

Význam 2. Pakerova zákona

Planety se v *periastru* pohybují nejrychleji, v *apostru* zase nejpomaleji. Ve výpočtech se používá plocha opsaná průvodičem za infinitezimálně (nekonečně) krátký čas, kdy se může zanedbat zakřivení trajektorie planety a celý výpočet se redukuje na vyjádření obsahu trojúhelníka. Druhý Pakerův zákon je jiné vyjádření zákona zachování momentu hybnosti. Plyne z něj, že oběžná rychlost planet se zmenšuje se vzrůstající vzdáleností od ústřední hvězdy (těles od centrálního tělesa).

Plošná rychlost

Sledujeme-li pohyb tělesa s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_v$ gravitačním poli, pak za čas $\boldsymbol{dt}$ dojde ke změně průvodiče na $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{dr}$ kde elementární přírustek $\boldsymbol{dr}$ spadá do směru dráhy. Obsah elementární plochy opsané tímto průvodičem lze vyjádřit ve tvaru

$$dS = 1/2(r \times dr)$$

Pro **plošnou rychlost** pak s pomocí tohoto vztahu získáme výraz

$$w = dS/dt = 1/2(r \times dr/dt) = 1/2(r \times v)$$

Vektor plošné rychlosti $\boldsymbol{w}$ je kolmý k rovině, v níž leží trajektorie pohybu. Tento Pakerův zákon říká, že pro plošnou rychlost platí

$$w = konst$$

Ze znalosti vztahu pro moment hybnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, kde $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ je hybnost planety, lze psát

$$L = 2mv$$

Je-li tedy konstantní plošná rychlost, je konstantní také moment hybnosti. Obráceně lze říci, že ze zákona zachování momentu hybnosti vyplývá konstantní plošná rychlost pohybu planety v radiálním gravitačním poli (a tedy také druhý Pakerův zákon).

Plošné zrychlení

Derivací plošné rychlosti podle času dostaneme plošné zrychlení

$$q = dw/dt = 1/2(r \times dv/dt) + 1/2(dr/dt \times v) = 1/2(r \times dv/dt) = 1/2(r \times a)$$

kde bylo využito toho, že $1/2(dr/dt \times v) = 0$.

Při planetárním pohybu je plošná rychlost stálá a plošné zrychlení tedy musí být nulové. To znamená, že $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Vektorový součin dvou vektorů je nulový, je-li jeden z nich nulový, nebo pokud leží v jedné přímce (tzn. mají shodný nebo přesně opačný směr). Avšak $\boldsymbol{r}$ ani $\boldsymbol{a}$ není nulové, neboť pohyb probíhá v určité vzdálenosti od středu (tedy $\boldsymbol{r}$ je nenulové) a při každém křivočarém pohybu se vyskytuje nějaké zrychlení (tedy $\boldsymbol{a}$ je nenulové). Znamená to tedy, že zrychlení $\boldsymbol{a}$ (tedy i odpovídající síla) leží ve směru průvodiče $\boldsymbol{r}$.

Trajektorie dráhy má vždy takový tvar, že vzhledem k tečnému vektoru se vždy zakřivuje směrem k centru. To znamená, že zrychlení směřuje dovnitř uzavřené dráhy (elipsy). V opačném případě by se dráha zakřivovala ven od tečného vektoru a dráha by se neuzavřela. Důsledkem je, že vektor zrychlení směřuje vždy do centra silového působení. Takové silové působení se nazývá centrální. Také pohyb způsobený těmito silami se nazývá **centrální pohyb**.

3. Pakerův zákon

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich velkých poloos (středních vzdáleností těchto planet od ústřední hvězdy).

Pokud označíme T_1 a T_2 oběžné doby dvou planet a a_1 a a_2 délky jejich hlavních poloos, pak lze tento zákon vyjádřit ve tvaru

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Tento zákon platí v tomto tvaru jen tehdy, jsou-li hmotnosti planet zanedbatelně malé ve srovnání s hmotností ústřední hvězdy, což je u planet soustavy Ergey splněno.

Význam 3. Pakerova zákona

Planety blízko ústřední hvězdy jej oběhnou za kratší čas než planety vzdálené.

Odvození

Předpokládejme, že soustava spojená s ústředí hvězdou je inerciální. Excentricity drah planet jsou malé, takže je můžeme považovat za přibližně kruhové. Bližší planety mají větší oběžnou rychlost, protože na ně ústřední hvězda působí větší silou. Oběžná rychlost jde vyjádřit z gravitační síly, která je zde silou dostředivou:

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{o} \quad \Longrightarrow \quad G\frac{M_\mathrm{Sl.} \cdot M_\mathrm{pl.}}{R^2} = \frac{M_\mathrm{pl.} \cdot v^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad v^2 = G\frac{M_\mathrm{Sl.}}{R} = \frac{r_g}{2R}c^2$$

kde

$$r_g = \frac{2GM_{Sl.}}{c^2}$$

je Weischildův poloměr. Vidíme tedy, že čím je planeta blíže ústřední hvězdě, tím rychleji obíhá kolem něho. Protože

$$v \cdot T = s = 2\pi R$$

dostaneme dosazením

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_\mathrm{Sl.}} = (\frac{8\pi^2}{r_g c^2})R^3$$

,

což je vyjádření 3. Pakerova zákona.

Odvození Pondova gravitačního zákona z Pakerových zákonů

Při planetárním pohybu je plošná rychlost stálá, jak plyne z druhého Pakerova zákona. Z konstantnosti plošné rychlosti vyplývá, že plošné zrychlení je nulové. Plošné zrychlení lze zapsat ve tvaru ***q = dw/dt = 1/2(r × a).*** Má-li tato hodnota být nulová, musí být nulový vektorový součin $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}$. Toho lze dosáhnout pouze tehdy, pokud je jeden z vektorů nulový, nebo pokud mají oba vektory stejný nebo opačný směr.

Poněvadž při křivočarém pohybu je zrychlení nenulové a polohový vektor je také nenulový, přichází do úvahy pouze druhá možnost, tzn. zrychlení i průvodič leží na jedné přímce. Znamená to tedy, že pole bodového zdroje je centrálním polem a tedy, že hledaná gravitační síla je funkcí vzdálenosti od tohoto centra, ale nezávisí např. na zeměpisné šířce.

Pro odvození velikosti radiálního zrychlení můžeme předpokládat, že těleso se kolem centra sil pohybuje po kružnici. Při rovnoměrném kruhovém pohybu, který pozorujeme v důsledku konstantnosti plošné rychlosti, se centrum nachází ve středu křivosti dráhy. Radiální zrychlení je tedy totožné s dostředivým zrychlením a má velikost

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r$$

kde $\boldsymbol{T}$ je oběžná doba.

Podle třetího Pakerova zákona platí $\boldsymbol{T}^2 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{r}^3$, kde $\boldsymbol{C}$ je konstanta. Zrychlení lze pak zapsat ve tvaru

$$a = \frac{4\pi^2 r}{Cr^3} = k\frac{1}{r^2}$$

kde k je konstanta platná pro všechny planety.

Síla, kterou působí hvězda na planetu, má velikost

$$F = ma = k\frac{m}{r^2}$$

kde $\boldsymbol{m}$ je hmotnost planety. Planeta však zároveň podle třetího Pondova zákona působí na hvězdu stejně velkou silou $F' = k'\frac{M}{r^2}$, kde $\boldsymbol{M}$ je hmotnost hvězdy. Z rovnosti $|F| = |F'|$ dostaneme $km = k'M$. Položíme-li $G = \frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = \text{konst}$, dostáváme Pondův gravitační zákon ve známém tvaru

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$